

[文章编号] 1001-246X(2003)06-0503-06

Ghost Fluid 方法与双介质可压缩流动计算

张 镭, 袁 礼

(中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所, 科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100080)

[摘 要] 应用带有 Isobaric 修正的 Ghost Fluid 方法配合 Level Set 方法计算可压缩双介质无粘流动. 该方法可以消除计算流体界面时所产生的数值跳动和耗散, 且编程上比界面跟踪法简单. 应用 WENO 格式数值求解欧拉方程和 Level Set 方程, 对由刚性气体状态方程所支配的一二维双介质流动进行数值计算, 得到了分辨率较高的计算结果.

[关键词] Level Set 方法; Ghost Fluid 方法; Isobaric 修正; 双介质流动

[中图分类号] O35

[文献标识码] A

0 引言

许多流动问题的研究, 如激波与不同介质界面接触间断的相互作用、燃料与气体混合燃烧、液体中气泡变形与坍塌、两种流体之间的 Richtmyer-Meshkov 不稳定性、Rayleigh-Taylor 不稳定性等, 都涉及到可压缩多介质流的数值模拟. 传统的多组分单相流计算方法很难计算这类问题, 主要困难在于不同流体的状态方程和物理参数相差太大, 一方面, 对于气液或气固问题, 很难得到所谓的混合物状态方程; 另一方面, 由于不同流体的密度比太大, 如可能达到 10^3 , 使得交界面上的压力计算极为困难.

现在对于可压缩多介质流的模拟方法主要有拉格朗日法, 任意拉格朗日-欧拉法(ALE), 阵面跟踪法, Level Set 方法^[1], 基于 Godunov 格式的两相流方法^[2], 以及格子 BGK 方法^[3]等. 其中 Level Set 方法是最近十几年以来逐渐发展起来的一种求解自由界面和多介质流动问题的欧拉型方法. 1992 年, Mulder 等人首次用 Level Set 方法计算了可压缩两介质气体界面问题^[4]. 但是在接触间断处产生了很大的数值耗散, 因此后来有人陆续提出了不同的改进方法^[5,6]. 近年来, 由 Fedkiw 等人^[7-9]提出的 Ghost Fluid 方法在计算多介质流体问题时取得了良好效果, 引起国内外研究者的广泛关注^[10,11].

本文将带 Isobaric 修正的 Ghost Fluid 方法和 Level Set 方法相结合, 用于模拟一类受刚性气体状

态方程支配的双介质可压缩无粘流动. 用 Level Set 函数的零集($\phi = 0$)表示流体界面, 用 Ghost Fluid 方法将求解原始流场转化为求解两个流场: 流场 1 设定 $\phi < 0$ 为真实区域, 而 $\phi > 0$ 为 Ghost 区域, 流场 2 则与之相反. Isobaric 修正不仅将熵(高维时还包括切向速度)向 Ghost 网格点延拓, 而且还向紧邻界面的真实网格点延拓, 这样就可以大幅度减少所谓的“过热(overheating)”误差^[7], 该方法的编程比界面跟踪法简单. 本文在空间离散上应用五阶 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) 差分格式^[12], 在时间离散上应用三阶 TVD 型 Runge-Kutta 法^[13]. 对几个典型的一维与二维气-气, 气-液两介质可压缩流动进行了数值模拟, 得到了分辨率较高的计算结果.

1 双介质流的数理模型

令 ρ, p 和 e 分别表示流体的密度、压力和单位质量的内能, $E = e + \frac{u^2 + v^2}{2}$ 表示单位质量的总能, u 和 v 分别表示 x 和 y 方向的速度分量. 二维直角坐标和柱坐标下的 Euler 方程可写成统一形式

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}_y = 0$$

[收稿日期] 2002-06-06; [修回日期] 2002-11-21

[基金项目] 国家重点基础研究(G1999032801)和国家自然科学基金(10172089)资助项目

[作者简介] 张镭(1975-), 男, 山东青岛, 硕士, 从事计算数学研究.

$$-\frac{v}{y^m} \begin{pmatrix} m\rho \\ m\rho u - \gamma^m \rho / Frv \\ m\rho v \\ m(\rho E + p) - \gamma^m \rho u / Frv \end{pmatrix}, \quad (1)$$

这里 t 是时间, $m=0$ 对应直角坐标, $m=1$ 对应柱坐标. $Fr = p_0 / (\rho_0 gL)$ 是 Froude 数, p_0 和 ρ_0 分别为参考压力和参考密度, L 为特征长度.

欧拉方程必须由状态方程封闭, 使用刚性气体状态方程

$$p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma\pi, \quad (2)$$

其中 γ 和 π 刻画了物质的特性, 该方程对气体和一部分处于高压下的液体和固体是一个合理的近似. 当 $e = RT/(\gamma - 1)$, $\pi = 0$ 时, 该方程为理想气体状态方程, 液体水的 Tait 方程为

$$p = B \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - B + A, \quad (3)$$

其中 $\gamma = 7.15$, $A = 10^5 \text{ Pa}$, $B = 3.31 \times 10^8 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. 通过定义内能

$$e = \frac{B\rho^{\gamma-1}}{(\gamma-1)\rho_0^\gamma} + \frac{B-A}{\rho}, \quad (4)$$

并令 $\pi = B - A$ 就可以将 Tait 方程改写成式(2)的形式, 此外定义流体的熵为^[7]

$$S = \frac{p + \pi}{\rho^\gamma}, \quad (5)$$

将它作为一个 Isobaric 修正参量.

由于界面随流体质点一起运动, 描述界面位置的运动方程即为 Level Set 方程

$$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0. \quad (6)$$

用 Level Set 方程求解流体界面最突出的问题是如何保持 ϕ 始终为到界面的有向距离. 方程(6)离散求解后, ϕ 可能不再是一个距离函数. 为保持距离函数特性 $|\nabla\phi| = 1$, 必需重新初始化. 本文采取了 Sussman 提出的重新初始化方法^[14], 其基本思想是将边值问题转化为初值问题. 具体做法是保持原有 Level Set 函数的零等值线不变, 求解方程

$$\phi_t + S(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0, \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad (7)$$

使其收敛于定常态, 式中 $S(\phi_0)$ 为带有适当数值耗散的符号函数.

Ghost Fluid 方法的策略是用计算单相流的方法来计算流场 1 和 2. 每一个流场由界面一侧的真实流体和界面另一侧的 Ghost 流体所组成. 界面被当做接触间断, 其物理条件是两侧的压力和法向速度相等. Ghost Fluid 方法赋予 Ghost 流体有当地网格点

真实流体的压力和法向速度, 以及从界面另一侧流体外推来的熵值和切向速度. 利用界面另一侧流体的状态方程, 可构造出 Ghost 流体的所有守恒变量. 由于 Ghost 流体具有与它所替换的真实流体相容的性质, 因而得到适定的边界条件; 同时, 它又拥有另一侧真实流体外推过来的熵值和切向速度, 而这二者的外推符合在物质界面或接触间断处存在着两个自由度(对二维而言)的论断^[7].

本文应用文[7, 8]的方法来延拓(外推)熵和切向速度. 具体做法是求解一个对应于在界面法向延拓的双曲型方程,

$$I_t \pm N \cdot \nabla\phi = 0, \quad (8)$$

其中 $N = \nabla\phi/|\nabla\phi|$ 为网格点的单位法向矢量, I 是待延拓的变量, 例如熵和切向速度. 我们用 + 号将 $\phi < 0$ 区域的 I 值延拓到 $\phi > 0$ 的区域, 类似地, 用 - 号将 $\phi > 0$ 区域的 I 值延拓到 $\phi < 0$ 的区域. 实际上为了减少 overheating 误差, 在作 + 延拓时, 是将 $\phi < -\epsilon$ 区域的 I 值向 $\phi > -\epsilon$ 的区域做延拓, 类似地, 在作 - 延拓时, 将 $\phi > \epsilon$ 区域的 I 值向 $\phi < \epsilon$ 的区域做延拓, 其中 $\epsilon = 1.5\Delta x$. 这种做法被称为带 Isobaric 修正的 Ghost Fluid 方法^[7].

2 数值方法

对欧拉方程和 Level Set 方程的输运项, 以及式(7)的空间离散应用五阶 WENO 格式. 关于 WENO 格式的具体实施详见文[12, 15], 在时间推进上应用 Shu^[13] 的三阶 TVD 型 Runge-Kutta 方法,

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n), \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(U^{(1)}), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(U^{(2)}), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 U^n 是第 n 时间层的守恒变量, $L(U^n)$ 为空间离散算子. 如同大多数文献^[4, 7, 11]的做法一样, 我们将欧拉方程和 Level Set 方程分开求解, 每解一步欧拉方程后再解一步 Level Set 方程和重新初始化方程(7), 这样做虽然理论上时间精度有所降低, 但实际上大大简化了计算.

在解延拓方程(8)时, 我们先将速度场作延拓, 然后应用互补投影法^[9]获得 Ghost 流体的切向速度. 用 $N = \nabla\phi/|\nabla\phi|$ 定义每一网格点的法向, 可以得到法向速度分量 $V_n = V \cdot N$. 然后求解延拓方程(8). 现在被延拓的 I 是一个向量, 包括熵和速度场. 这样在延拓区域的每一个网格点就有了两个独立的速度

场,一个是当地真实流体的 (V),另一个是延拓的 (U).我们从延拓的速度场获取切向分量 $U - U_n N$,从当地真实流体速度场获取法向分量 $V_n N$,两者之和就是 Ghost 流体的速度.

因为理论上方程(8)有定常解,故只需用一阶迎风差分离散即可.我们用文[1]中的一阶格式求解式(8).

3 数值算例

算例 1 两介质理想气体的接触间断

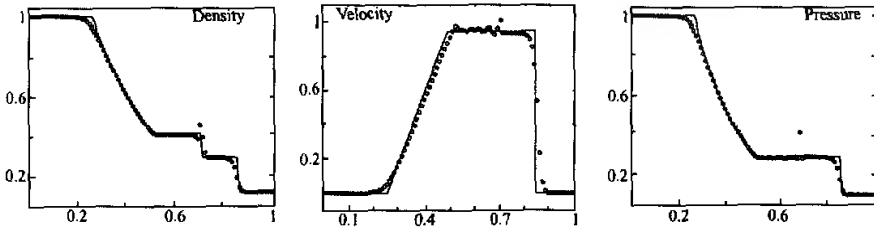


图 1 理想气体接触间断问题,无 Isobaric 修正的计算结果

Fig.1 Contact discontinuity problem without Isobaric fix

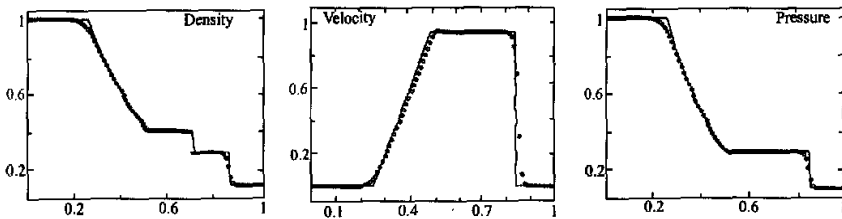


图 2 理想气体接触间断问题,用 Isobaric 修正的计算结果

Fig.2 Contact discontinuity problem with Isobaric fix

算例 2 一维气液两相接触间断的移动

计算区域 $[0,1]$,网格点数 100.初始界面位于 $x = 0.5$ 处,左侧为空气,右侧为水.水的参数为 $\gamma = 4.4, \pi = 6\,000, u = -1, \rho = 1\,000, p = 1$.空气的参数为 $\gamma = 1.4, \pi = 0, u = -1, \rho = 1.2, p = 1$;图 3 所示为经过 $t = 0.1$ 后的密度分布,界面已移动到 $x = 0.4$,且保持很好.

算例 3 一维气液两相 Riemann 问题

计算区域 $[0,1]$,网格点数 400,计算时间 $t = 0.1$,初始界面位于 $x = 0.5$ 处,左侧为某种液体,右侧为空气.各自的参数为:液体 $\gamma = 5.5, \pi = 1.505, u = 0, \rho = 0.991, p = 4.059 \times 10^{-4}$;空气 $\gamma = 1.4, \pi = 0, u = 0, \rho = 1.241, p = 2.753$.从图 4 可以清晰地看到右行稀疏波,左行接触间断和激波.接触间断的耗散宽度被控制在 3 个网格内,激波的耗散宽度被控

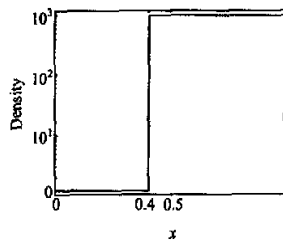


图 3 一维气液接触间断问题

Fig.3 1D air-water contact discontinuity problem

制在 5 个网格内,且在接触间断左右没有压力和速度振荡.

算例 4 二维滑移线问题

本例仍取自文[7].考虑 1 个 $1\,\text{m}^2$ 见方的正方形区域,在整个区域中 $\gamma = 1.4, \rho = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}, p =$

$1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 界面位于 $x = 0.5 \text{ m}$, 界面左侧切向速度为 $v = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 右侧为 $v = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 法向速度为 $u = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 我们用 20×20 的网格计算. 图 5 为普

通的单相流方法和 Ghost Fluid 方法的计算结果对比. 可见用普通的单相流方法会产生数值振荡和耗散, 而用 Ghost Fluid 方法剪切波就保持得很好.

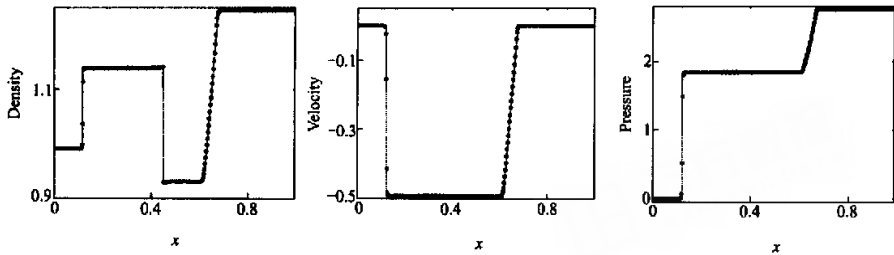
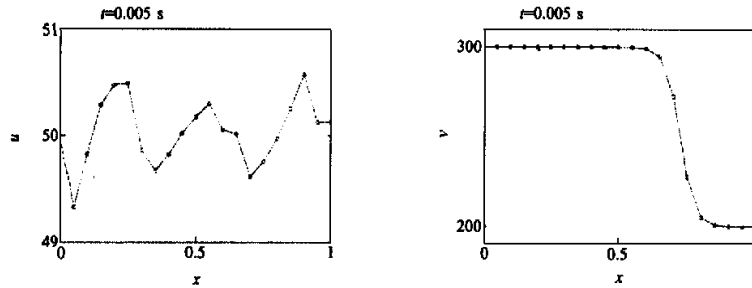
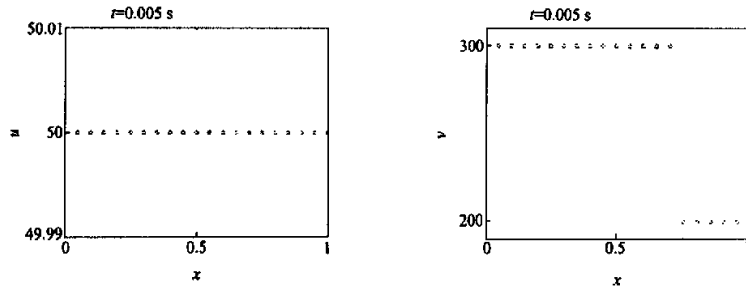


图 4 一维气液两相 Riemann 问题

Fig.4 1D gas-liquid Riemann problem



(a) 普通的单相流方法



(b) 带有 Isobaric 修正的 Ghost Fluid 方法

图 5 用普通单相流方法和带 Isobaric 修正的 Ghost Fluid 方法计算二维剪切流的结果

Fig.5 Comparison of the single phase method and the Ghost Fluid method with Isobaric fix

算例 5 二维液体中激波诱导的 Richtmyer-Meshkov 不稳定性

本例取自文[16], 一正弦扰动界面分离左边气

体和右边液体, 液体中向左运动激波同液气交界面相互作用, 产生 Richtmyer-Meshkov 不稳定性. 采用文[16]中的初始条件: 界面为 $x = 1.2 - 0.1 \cos(2\pi y)$,

$$(\rho, u, p, \gamma, \pi) = \begin{cases} (1, 0, 1, 1.4, 0), & \text{左侧气体,} \\ (5, 0, 1, 4, 1), & \text{波前液体,} \\ (7.093, -0.7288, 10, 4, 1), & \text{波后液体,} \end{cases} \quad (10)$$

图 6 显示了不同时刻的密度等值线和界面轮廓, 可见有气体泡状结构和液体钉状结构.

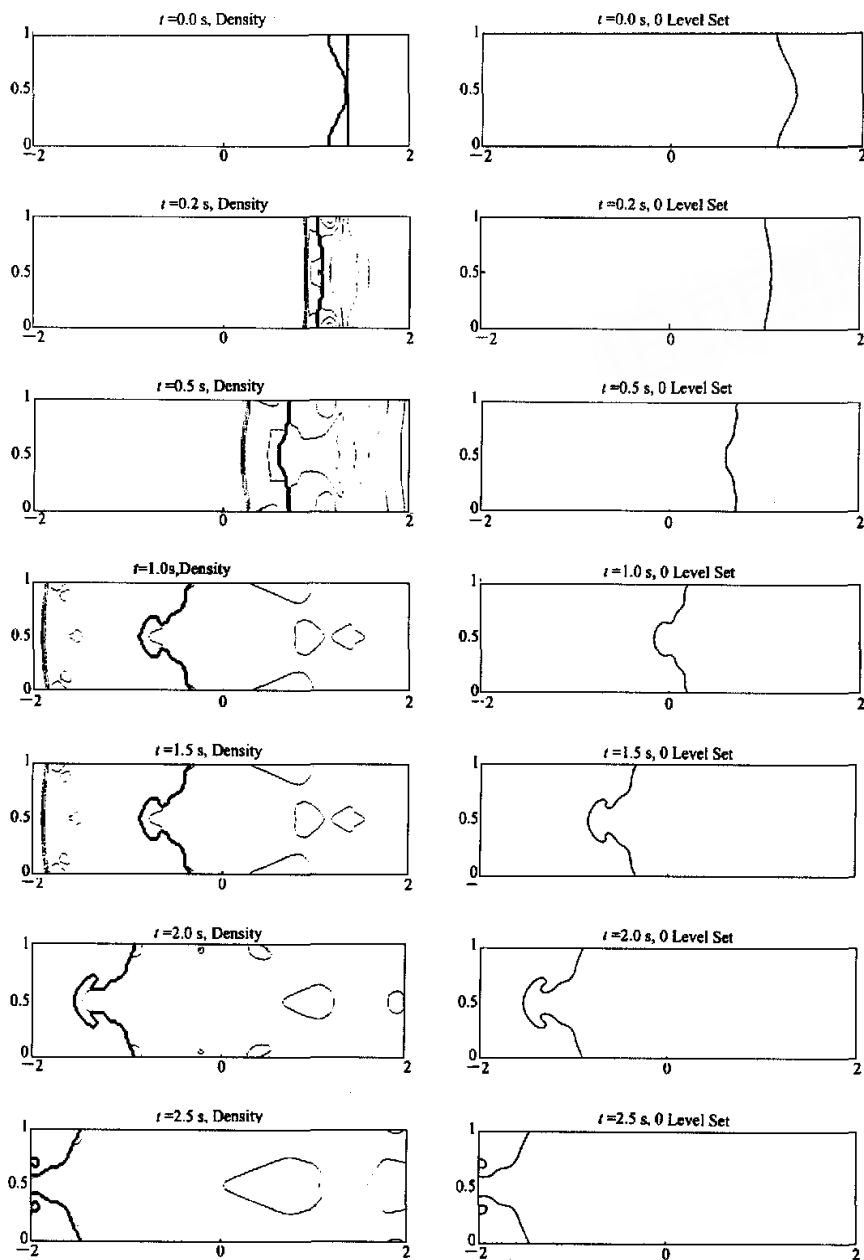


图 6 二维液体激波诱导 Richtmyer-Meshkov 不稳定性

Fig. 6 Density contours and fluid interface of the Richtmyer-Meshkov instability

4 结 论

本文的研究表明,使用 Level Set 方法计算多介质可压缩无粘流动问题时,采用带 Isobaric 修正的 Ghost Fluid 方法,可以消除由于不连续的熵场以及

不连续的切向速度所产生的数值耗散,使得对所有流动变量都有较高的分辨率.数值模拟了较大密度比的气-液两相流,得到了物理上正确,且分辨率较高的结果.

[参 考 文 献]

- [1] Sethian J. Level Set methods and fast marching methods [M]. Cambridge University Press, 1999.
- [2] Saurel R, Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows [J]. J Comput Phys, 1999, **150**:425 – 467.
- [3] Lian Y S, Xu K. A gas-kinetic scheme for multimaterial flows and its application in chemical reactions [J]. J Comput Phys, 2000, **163**:349 – 375.
- [4] Mulder W, Osher S, Sethian J. Computing interface motion in compressible gas dynamics [J]. J Comput Phys, 1992, **100**:209 – 228.
- [5] Jenny P, Muller P, Thomann H. Correction of conservative Euler solvers for gas mixtures [J]. J Comput Phys, 1997, **132**:91 – 107.
- [6] Karni S. Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm [J]. J Comput Phys, 1994, **112**:31 – 43.
- [7] Fedkiw R, Markenscoff A, Merriman B. An Isobaric fix for the overheating problem in multimaterial compressible flows [J]. J Comput Phys, 1999, **148**:545 – 578.
- [8] Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid method) [J]. J Comput Phys, 1999, **152**:457 – 492.
- [9] Fedkiw R, Liu X D. The Ghost Fluid method for viscous flows [A]. In: Hafez M, Chattot J J, eds, Innovative methods for numerical solutions of partial differential equations [M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2002. 111 – 143.
- [10] Xu S, Aslam T, Stewart D. High resolution numerical simulation of ideal and non-ideal compressible reacting flows with embedded internal boundaries [J]. Combust Theory Modeling, 1997, **1**(1):113.
- [11] 唐维军, 赵宁, 李小林, 张景琳, 蔚喜军. 随机扰动下三维流体界面不稳定性的并行计算 [J]. 计算物理, 2001, **18**(6):539 – 543.
- [12] Jiang C S, Wu C C. A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics [J]. J Comput Phys, 1999, **150**:561 – 594.
- [13] Shu C-W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. J Comput Phys, 1988, **77**:439 – 471.
- [14] Sussman M, Smereka P, Osher S. A Level Set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow [J]. J Comput Phys, 1994, **114**:146 – 154.
- [15] Osher S, Shu C-W. High order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1991, **28**:902.
- [16] Shyue K M. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems [J]. J Comput Phys, 1998, **142**:208 – 243.
- [17] Shyue K M. A fluid-mixture type algorithm for compressible multicomponent flow with van der Waals equation of state [J]. J Comput Phys, 1999, **156**:43 – 88.

Ghost Fluid Method and Computation of Compressible Two-fluid Flows

ZHANG Lei, YUAN Li

(Institute of Computational Mathematics and LSEC, Academy of Mathematics and System Sciences,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract: Compressible two-fluid inviscid flow is computed by the Ghost Fluid method with Isobaric fix. The method can avoid numerical oscillation and smearing as is encountered with a shock-capturing scheme in computing fluid interface, and it is simpler to code than fronttracking techniques. The system of the Euler equations which describes the fluid flow and the level set equation which describes the interface motion is solved by high-resolution WENO finite difference scheme. Satisfactory results are obtained for several 1D and 2D compressible two-fluid flows subject to the stiffened equation of state.

Key words: Level Set method; Ghost Fluid method; Isobaric fix; two-fluid flow